評分參考

數學 必修部分 · 試卷一

課題練習：方程續篇 · 2027

本評分參考供閱卷員參考，並非標準答案。若考生的方法正確，應給予方法分。除題目另有指明外，可接受等效方法。

題號	解法	分數	備註
甲部(1)（16 分）			
1.	$(x, y) = (3, 5)$ **或** $(-1, -3)$ 將 $y = 2x - 1$ 代入 $y = x^2 - 4$： $$2x - 1 = x^2 - 4 \implies x^2 - 2x - 3 = 0.$$ 因式分解得 $(x-3)(x+1) = 0$，故 $x = 3$ 或 $x = -1$。 當 $x = 3$ 時，$y = 2(3) - 1 = 5$。 當 $x = -1$ 時，$y = 2(-1) - 1 = -3$。 所以解為 $(x, y) = (3, 5)$ 及 $(x, y) = (-1, -3)$。	3	
2.	$x = -3,\ -2,\ 2$ **或** 3 設 $u = x^2$。則方程變為 $$u^2 - 13u + 36 = 0,$$ 即 $(u-4)(u-9) = 0$，故 $u = 4$ 或 $u = 9$。 由於 $u = x^2$，故 $x^2 = 4$ 或 $x^2 = 9$。因此 $$x = \pm 2 \quad \text{或} \quad x = \pm 3.$$ 這四個值均滿足原方程。	3	
3.	**(a)** $x = -1$ 或 $x = 3$ 曲線與 x 軸相交於 $x = -1$ 及 $x = 3$。因此解為 $x = -1$ 或 $x = 3$。	1	
	(b) $x = -2$ 或 $x = 4$ 直線 $y = 5$ 與曲線相交於 $$x^2 - 2x - 3 = 5,$$ 即 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 之處。 從圖像可見，兩個交點的 x 坐標分別為 -2 及 4。因此 $x = -2$ 或 $x = 4$。	3	

題號	解法	分數	備註
4.	**(a)** $n(n+2)=288$ 設有 n 排，每排有 $(n+2)$ 張椅子。由於椅子共有 288 張， $n(n+2)=288.$	2	
	(b) 16 排，每排 18 張椅子 展開方程： $n^2+2n-288=0.$ 因式分解得 $(n+18)(n-16)=0,$ 故 $n=-18$ 或 $n=16$。 由於排數必須為正數，故捨去 $n=-18$。因此共有 16 排，而每排椅子的數目為 $16+2=18$。 驗算：$16\times 18=288$。	4	
甲部(2)（24 分）			
5.	**(a)** $m<-2-2\sqrt{2}$ 或 $m>-2+2\sqrt{2}$ 在交點處，兩者的 y 坐標相等： $x^2-2x+5=mx+3.$ 整理得 $x^2-(m+2)x+2=0.$ 要有兩個相異交點，判別式須為正： $\Delta=[-(m+2)]^2-4(1)(2)=(m+2)^2-8>0.$ 因此 $(m+2)^2>8$，即 $m+2<-2\sqrt{2}\quad$ 或 $\quad m+2>2\sqrt{2}.$ 故 $m<-2-2\sqrt{2}\quad$ 或 $\quad m>-2+2\sqrt{2}.$	4	

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
	(b) $(1, 4)$ 由於 $(2, 5)$ 在 L 上， $$5 = 2m + 3,$$ 故 $m = 1$。因此 L 為 $y = x + 3$。 在交點處， $$x^2 - 2x + 5 = x + 3,$$ 即 $$x^2 - 3x + 2 = 0,$$ 亦即 $(x - 1)(x - 2) = 0$。故 $x = 1$ 或 $x = 2$。 $x = 2$ 對應點 $(2, 5)$。當 $x = 1$ 時，$y = 1 + 3 = 4$。 因此另一個交點為 $(1, 4)$。	3	
6.	**(a)** $x^2 - 4x - 6 = 0$ 當 $x \neq 1$ 且 $x \neq -2$ 時，兩邊同乘以 $(x - 1)(x + 2)$： $$3(x + 2) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2).$$ 展開兩邊， $$3x + 6 + 2x - 2 = x^2 + x - 2,$$ 即 $$5x + 4 = x^2 + x - 2.$$ 因此 $$x^2 - 4x - 6 = 0.$$	3	
	(b) $x = 2 + \sqrt{10}$ 或 $x = 2 - \sqrt{10}$ 利用二次公式，取 $a = 1$、$b = -4$、$c = -6$： $$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = 2 \pm \sqrt{10}.$$ 這兩個值均不等於 1 及 −2，故均滿足原方程。	3	

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
	(c) $x=\sqrt{2+\sqrt{10}}$ 或 $x=-\sqrt{2+\sqrt{10}}$ 設 $u=x^2$。方程變為 $$\frac{3}{u-1}+\frac{2}{u+2}=1,$$ 由 (a) 部可知 $$u^2-4u-6=0.$$ 故 $u=2\pm\sqrt{10}$。 由於 $u=x^2\geq 0$，而 $2-\sqrt{10}<0$，故須捨去 $2-\sqrt{10}$。因此 $$x^2=2+\sqrt{10},$$ 即 $$x=\pm\sqrt{2+\sqrt{10}}.$$	2	
7.	**(a)** $x\approx 4.2$ 或 $x\approx -0.2$ 曲線與 x 軸相交於兩點。從圖像讀取，其 x 坐標約為 4.2 及 −0.2。 （準確地，$-x^2+4x+1=0$ 給出 $x=2\pm\sqrt{5}$，故 $x\approx 4.236$ 或 $x\approx -0.236$。）	2	
	(b) $x=1$ 或 $x=2$ 由 $y=-x^2+4x+1$ 可得 $$x^2=4x+1-y.$$ 代入 $x^2-3x+2=0$： $$(4x+1-y)-3x+2=0,$$ 故 $$y=x+3.$$ 在圖像上畫出直線 $y=x+3$。它與曲線相交於 $(1,4)$ 及 $(2,5)$，故解為 $x=1$ 或 $x=2$。	4	

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
	(c) $k < \frac{13}{4}$ 直線 $y = x + k$ 的斜率為 1，故與 (b) 部所畫的直線 $y = x + 3$ 平行。從圖像可見，當這類直線位於斜率為 1 的切線之下時，會與曲線相交兩次。 在交點處， $$-x^2 + 4x + 1 = x + k,$$ 故 $$x^2 - 3x + (k - 1) = 0.$$ 要有兩個相異實根， $$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(k - 1) > 0.$$ 因此 $$9 - 4k + 4 > 0,$$ 即 $$13 > 4k,$$ 亦即 $$k < \frac{13}{4}.$$ （當 $k = \frac{13}{4}$ 時，直線與曲線相切，只有一個重根。）	3	
乙部（10 分）			
8.	**(a)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{5}{24}$ 一小時內，水管 B 注滿泳池的 $\frac{1}{x}$，而水管 A 注滿泳池的 $\frac{1}{x+4}$。 兩管同時使用時，4.8 小時可注滿泳池，故一小時內注滿 $$\frac{1}{4.8} = \frac{5}{24}$$ 的泳池。因此 $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{5}{24}.$$ 兩邊同乘以 $24x(x + 4)$： $$24(x + 4) + 24x = 5x(x + 4),$$ 化簡得 $$5x^2 - 28x - 96 = 0.$$	3	

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
	(b) $x = 8$ 由 (a) 部， $$5x^2 - 28x - 96 = 0.$$ 利用二次公式， $$x = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4(5)(-96)}}{2(5)} = \frac{28 \pm \sqrt{784 + 1920}}{10} = \frac{28 \pm 52}{10}.$$ 故 $x = 8$ 或 $x = -2.4$。 由於 x 代表水管 B 注水所需的時間，故必須為正數。因此捨去 $x = -2.4$，得 $x = 8$。	3	
	(c) 12 小時 水管 A 需 $x + 4$ 小時，故需 $8 + 4 = 12$ 小時。	1	
	(d) 6 小時 在 2 小時內，水管 A 注滿 $$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$ 的泳池，故剩下 $\frac{5}{6}$ 的泳池。 兩管同時開啟時，注水速度為每小時 $$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{5}{24}.$$ 注滿剩餘 $\frac{5}{6}$ 所需的時間為 $$\frac{5/6}{5/24} = \frac{5}{6} \times \frac{24}{5} = 4.$$ 因此總時間為 $2 + 4 = 6$ 小時。	3	

TUTGATHER