評分參考

數學 必修部分 · 試卷一

課題練習：多項式續篇 · 2027

本評分參考供閱卷員參考，並非標準答案。若考生的方法正確，應給予方法分。除題目另有指明外，可接受等效方法。

題號	解法	分數	備註
甲部(1)（16 分）			
1.	**商為 $3x^2+5x-2$；餘數為 2** 逐項相除。因 $3x^3 \div x = 3x^2$ 且 $3x^2(x-1) = 3x^3 - 3x^2$，相減後得 $5x^2 - 7x + 4$。接著，$5x^2 \div x = 5x$ 且 $5x(x-1) = 5x^2 - 5x$，相減後得 $-2x + 4$。最後，$-2x \div x = -2$ 且 $-2(x-1) = -2x + 2$，餘數為 2。因此 $$3x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x-1)(3x^2+5x-2) + 2.$$	3	
2.	**(a)** $a = 1$ 由餘式定理，$f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘數為 $f(1)$。而 $f(1) = 2(1)^3 + a(1)^2 - 5(1) + 6 = a + 3$。因餘數為 4，故 $a+3=4$，所以 $a=1$。	2	
	(b) 10 取 $a=1$，得 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 6$。由餘式定理，除以 $x+1$ 的餘數為 $f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 5(-1) + 6 = -2 + 1 + 5 + 6 = 10$。	1	
3.	**(a)** $a = 3$ 由因式定理，$f(-2) = 0$。而 $f(-2) = 2(-2)^3 + a(-2)^2 - 5(-2) - 6 = -16 + 4a + 10 - 6 = 4a - 12$。因此 $4a - 12 = 0$，所以 $a = 3$。	2	
	(b) $f(x) = (x+2)(2x-3)(x+1)$ 取 $a=3$，得 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$。除以 $x+2$ 得 $f(x) = (x+2)(2x^2 - x - 3)$。將二次式因式分解，得 $2x^2 - x - 3 = (2x-3)(x+1)$。因此 $f(x) = (x+2)(2x-3)(x+1)$。	2	

題號	解法	分數	備註
4.	(a) $P(x) = x(x-2)(x+2)$；$Q(x) = (x+3)(x-2)$ $P(x) = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$。又 $Q(x) = x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$。	2	
	(b) $x-2$ $P(x) = x(x-2)(x+2)$ 與 $Q(x) = (x+3)(x-2)$ 唯一的公因式為 $x-2$。因此 H.C.F. 為 $x-2$。	2	
	(c) $x(x-2)(x+2)(x+3)$ L.C.M. 必須包含每個出現的因式，並取其次數最高者：x、$x-2$、$x+2$ 及 $x+3$。因此 L.C.M. 為 $x(x-2)(x+2)(x+3)$。	2	
甲部(2)（24 分）			
5.	(a) $(42x-21)\ \text{cm}^2$ 框架的面積為 $(3x+2)^2-(3x-5)^2$。取 $a = 3x+2$ 及 $b = 3x-5$ 代入 $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$，則面積為 $[(3x+2)-(3x-5)][(3x+2)+(3x-5)] = (7)(6x-3) = 42x-21.$ 因此面積為 $(42x-21)\ \text{cm}^2$。	2	
	(b) $x = 6$ 設 $42x-21 = 231$，則 $42x = 252$，所以 $x = 6$。	2	
	(c) 4221 觀察到 $305 = 3(101)+2$ 及 $298 = 3(101)-5$。在 (a) 的恆等式中取 $x = 101$，得 $305^2-298^2 = 42(101)-21 = 4242-21 = 4221.$	3	
6.	(a) 商為 $3x^2+5x-2$；餘數為 0 $3x^3 \div x = 3x^2$ 且 $3x^2(x-1) = 3x^3-3x^2$，餘下 $5x^2-7x+2$。接著，$5x^2 \div x = 5x$ 且 $5x(x-1) = 5x^2-5x$，餘下 $-2x+2$。最後，$-2x \div x = -2$ 且 $-2(x-1) = -2x+2$，餘數為 0。因此 $3x^3+2x^2-7x+2 = (x-1)(3x^2+5x-2)$。	3	

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
	(b) $f(x) = (x-1)(3x-1)(x+2)$ 將商因式分解，得 $3x^2+5x-2 = (3x-1)(x+2)$。因此 $f(x) = (x-1)(3x-1)(x+2)$。	2	
	(c) $x = 1$、$x = \frac{1}{3}$ 或 $x = -2$ 由 $(x-1)(3x-1)(x+2) = 0$，得 $x = 1$、$x = \frac{1}{3}$ 或 $x = -2$。	1	
	(d) 0 由 (b) 部，$3x-1$ 為 $f(x)$ 的因式，所以餘數為 0。同樣地，由餘式定理，$f(\frac{1}{3}) = 0$。	2	
7.	(a) $k = -1$ 由餘式定理，兩個餘數分別為 $f(1) = 1+k-4-6 = k-9$ 及 $f(-2) = -8+4k+8-6 = 4k-6$。因餘數相等，故 $k-9 = 4k-6$。因此 $-3 = 3k$，所以 $k = -1$。	4	
	(b) −10 取 $k = -1$，共同的餘數為 $f(1) = 1-1-4-6 = -10$。驗算：$f(-2) = 4(-1)-6 = -10$。	2	
	(c) $f(3) = 0$，故 $x-3$ 為因式 取 $k = -1$，得 $f(x) = x^3-x^2-4x-6$。則 $f(3) = 3^3-3^2-4(3)-6 = 27-9-12-6 = 0.$ 由因式定理，$x-3$ 為 $f(x)$ 的因式。	3	
乙部（10 分）			
8.	(a) $a = -1$、$b = -1$、$c = 1$ 因 $P(1) = 0$，得 $1+a+b+c = 0$。因 $P(-1) = 0$，得 $-1+a-b+c = 0$。將第一式減去第二式，得 $2+2b = 0$，所以 $b = -1$。將兩式相加，得 $2a+2c = 0$，所以 $c = -a$。最後，由 $P(2) = 3$ 得 $8+4a+2b+c = 3$，即 $8+4a-2+c = 3$，亦即 $4a+c = -3$。代入 $c = -a$，得 $3a = -3$，所以 $a = -1$ 及 $c = 1$。因此 $a = -1$、$b = -1$ 及 $c = 1$。	4	

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
	(b) $P(x) = (x-1)^2(x+1)$ 取 $a = -1$、$b = -1$ 及 $c = 1$，得 $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$。因 $P(1) = 0$，故 $x - 1$ 為因式。相除得 $P(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$。因此 $(x-1)^2$ 為 $P(x)$ 的因式。	3	
	(c) $x = 1$（重根）或 $x = -1$ 由 $(x-1)^2(x+1) = 0$，得 $x = 1$（重根）或 $x = -1$。	1	
	(d) 圖像在 $x = -1$ 處穿過 x 軸，並在 $x = 1$ 處與該軸相切。 因 $P(x) = (x-1)^2(x+1)$，在 $x = 1$ 附近，因式 $(x-1)^2$ 非負且不改變正負號，所以 $P(x)$ 在 1 的兩側同號，圖像在該處與 x 軸相切。在 $x = -1$ 附近，因式 $x + 1$ 改變正負號，而 $(x-1)^2 > 0$，所以 $P(x)$ 改變正負號，圖像在該處穿過 x 軸。	2	

TUTGATHER