評分參考

數學 必修部分 · 試卷一

課題練習：指數函數與對數函數 · 2027

本評分參考供閱卷員參考，並非標準答案。若考生的方法正確，應給予方法分。除題目另有指明外，可接受等效方法。

題號	解法	分數	備註
甲部(1)（16 分）			
1.	$\frac{3x^5}{y^4}$ 運用指數定律，$(27x^6y^{-3})^{2/3}=27^{2/3}x^4y^{-2}=9x^4y^{-2}$，且 $(9x^{-2}y^4)^{1/2}=9^{1/2}x^{-1}y^2=3x^{-1}y^2$。因此該式等於 $\frac{9x^4y^{-2}}{3x^{-1}y^2}=3x^5y^{-4}=\frac{3x^5}{y^4}$。	3	
2.	$k=5$，$a=3$；**當** $x=-1$ **時**，$y=\frac{5}{3}$ 把 $(0,5)$ 代入 $y=ka^x$，得 $5=ka^0=k$，故 $k=5$。把 $(2,45)$ 代入，得 $45=5a^2$，故 $a^2=9$。由於 $a>0$，$a=3$。當 $x=-1$ 時，$y=5(3^{-1})=\frac{5}{3}$。	3	
3.	$\frac{5}{12}$ 把每個對數寫成冪。由於 $8^{2/3}=4$，$\log_8 4=\frac{2}{3}$。由於 $9^{-3/2}=\frac{1}{27}$，$\log_9\frac{1}{27}=-\frac{3}{2}$。由於 $16^{5/4}=32$，$\log_{16}32=\frac{5}{4}$。因此總和為 $\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{8-18+15}{12}=\frac{5}{12}$。	4	
4.	**(a)** $3x+2y$ $\log 72=\log(2^3\cdot3^2)=3\log2+2\log3=3x+2y$。	3	
	(b) $\frac{3x+y}{x+y}$ 由換底公式，$\log_6 24=\frac{\log24}{\log6}=\frac{\log(2^3\cdot3)}{\log(2\cdot3)}=\frac{3\log2+\log3}{\log2+\log3}=\frac{3x+y}{x+y}$。	3	
甲部(2)（24 分）			
5.	**(a)** $x=1$ 或 $x=3$ 設 $u=2^x$。由於 $2^{2x}=u^2$ 且 $2^{x+1}=2u$，方程變為 $u^2-10u+16=0$，即 $(u-2)(u-8)=0$。故 $u=2$ 或 $u=8$，得 $2^x=2$ 或 $2^x=8$。因此 $x=1$ 或 $x=3$。	4	

題號	解法	分數	備註
	(b) $x = 5$ 要使對數有定義，須 $x+3>0$ 且 $x-3>0$，故 $x>3$。合併對數得 $\log_4[(x+3)(x-3)] = 2$，故 $(x+3)(x-3) = 4^2 = 16$。因此 $x^2 - 9 = 16$，即 $x^2 = 25$，故 $x = 5$ 或 $x = -5$。由於 $x>3$，捨去 $x = -5$。所以 $x = 5$。	3	
6.	**(a)** HK$57 732 每月利率為 $\frac{3.6\%}{12} = 0.3\% = 0.003$。經過 48 個月後，款項為 $50000(1.003)^{48} \approx 57731.76$。因此款項為 HK$57 732（準確至最接近的元）。	2	
	(b) 61 個月 需要 $50000(1.003)^n > 60000$，即 $(1.003)^n > 1.2$。取對數得 $n\log 1.003 > \log 1.2$，故 $n > \frac{\log 1.2}{\log 1.003} \approx 60.86$。因此最小的整數 n 為 61。驗算：$50000(1.003)^{60} \approx 59844.74 < 60000$，而 $50000(1.003)^{61} \approx 60024.27 > 60000$。	3	
	(c) 年利率 3.66%；由於利息每月計入，年內所賺取的利息本身會再生利息。 一年後，本金 P 會增至 $P(1.003)^{12}$，故有效年利率為 $(1.003)^{12} - 1 \approx 0.03659998$，即年利率 3.66%（準確至兩位小數）。它高於名義利率 3.6%，因為利息每月加入戶口，並在該年餘下的月份再生利息。	3	
7.	**(a)** $x^{1/2} + x^{-1/2} = 3$ 展開得 $(x^{1/2} + x^{-1/2})^2 = x + 2x^{1/2}x^{-1/2} + x^{-1} = x + 2 + \frac{1}{x} = 7 + 2 = 9$。由於 $x>0$，$x^{1/2} + x^{-1/2} > 0$，故 $x^{1/2} + x^{-1/2} = \sqrt{9} = 3$。	3	
	(b) 18 展開得 $(x^{1/2} + x^{-1/2})(x + x^{-1}) = x^{3/2} + x^{-1/2} + x^{1/2} + x^{-3/2} = (x^{3/2} + x^{-3/2}) + (x^{1/2} + x^{-1/2})$。因此 $3 \times 7 = (x^{3/2} + x^{-3/2}) + 3$，故 $x^{3/2} + x^{-3/2} = 21 - 3 = 18$。	3	
	(c) 123 同樣地，$(x^{3/2} + x^{-3/2})(x + x^{-1}) = x^{5/2} + x^{-5/2} + x^{1/2} + x^{-1/2} = (x^{5/2} + x^{-5/2}) + (x^{1/2} + x^{-1/2})$。因此 $18 \times 7 = (x^{5/2} + x^{-5/2}) + 3$，故 $x^{5/2} + x^{-5/2} = 126 - 3 = 123$。	3	
乙部（10 分）			

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
8.	(a) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ $f(x) = \frac{4^x}{2^x} - \frac{1}{2^x} = 2^{2x-x} - 2^{-x} = 2^x - 2^{-x}$。	2	
	(b) $f(-x) = -f(x)$；圖像繞原點具有二階旋轉對稱。 $f(-x) = 2^{-x} - 2^{-(-x)} = 2^{-x} - 2^x = -(2^x - 2^{-x}) = -f(x)$。因此，$y = f(x)$ 的圖像繞原點旋轉 180° 後保持不變；換言之，它關於原點有中心對稱。	2	
	(c) $x = 1$ 設 $u = 2^x$，其中 $u > 0$。則 $u - \frac{1}{u} = \frac{3}{2}$，故 $2u^2 - 3u - 2 = 0$。因式分解得 $(2u + 1)(u - 2) = 0$，故 $u = -\frac{1}{2}$ 或 $u = 2$。由於 $u > 0$，$u = 2$，得 $2^x = 2$，因此 $x = 1$。	3	
	(d) 對每個實數 k，方程 $u^2 - ku - 1 = 0$ 恰有一個正根 u，而 $2^x = u$ 恰有一個實數解。 設 $u = 2^x$，其中 $u > 0$。方程變為 $u - \frac{1}{u} = k$，即 $u^2 - ku - 1 = 0$。其判別式為 $k^2 + 4 > 0$，故它有兩個相異實根，且兩根之積為 $-1 < 0$；因此恰有一個根為正。對於這個正根 u，方程 $2^x = u$ 恰有一個實數解 $x = \log_2 u$。所以對每個實數 k，$f(x) = k$ 恰有一個實數解。	3	

TUTGATHER