評分參考

數學 必修部分 · 試卷一

課題練習：函數與圖像 · 2027

本評分參考供閱卷員參考，並非標準答案。若考生的方法正確，應給予方法分。除題目另有指明外，可接受等效方法。

題號	解法	分數	備註
甲部(1)（16 分）			
1.	**(a)** $f(-2)=3$ $f(-2)=\sqrt{5-2(-2)}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$。	1	
	(b) $x\le\frac{5}{2}$，即 $(-\infty,\frac{5}{2}]$ 要使 $f(x)$ 為實數，根號內的式子必須非負：$5-2x\ge 0$。因此 $2x\le 5$，即 $x\le\frac{5}{2}$。定義域為 $(-\infty,\frac{5}{2}]$。	2	
2.	**(a)** $k=-2$ 代入 $x=3$ 及 $y=-18$：$-18=k(3)^2=9k$，所以 $k=-2$。	1	
	(b) 圖像開口向下；頂點為 $(0,0)$。 由於 $k=-2<0$，$y=-2x^2$ 的圖像開口向下。其最高點為原點，故頂點為 $(0,0)$。	2	
3.	$b=-4$，$c=5$ 由 $f(1)=3$：$2+b+c=3$，所以 $b+c=1$ (1)。由 $f(-2)=21$：$8-2b+c=21$，所以 $-2b+c=13$ (2)。由 (2) 減 (1)：$-3b=12$，故 $b=-4$。於是 $c=1-(-4)=5$。驗算：$f(x)=2x^2-4x+5$，$f(1)=3$ 及 $f(-2)=8+8+5=21$。	4	
4.	**(a)** y 截距為 120。它代表上門費，即未行駛任何距離前的收費。 直線與 y 軸相交於 $(0,120)$，故 y 截距為 120。它是 $x=0$ 時的總收費，即 \$120 的固定上門費。	2	

題號	解法	分數	備註
	(b) 每公里 $20 該直線通過 $(0,120)$ 及 $(10,320)$。每公里收費即斜率：$\frac{320-120}{10-0}=\frac{200}{10}=20$。因此每公里收費為 $20。	2	
	(c) $420 利用上門費及每公里收費：總收費 $=120+20(15)=120+300=420$。因此總收費為 $420。	2	
甲部(2)（24 分）			
5.	**(a)** $f(4)=\frac{11}{3}$，$f(-1)=-\frac{1}{2}$ $f(4)=\frac{2(4)+3}{4-1}=\frac{11}{3}$。又 $f(-1)=\frac{2(-1)+3}{-1-1}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$。	2	
	(b) $x=\frac{8}{3}$ $\frac{2x+3}{x-1}=5$，所以 $2x+3=5(x-1)=5x-5$。於是 $3+5=5x-2x$，即 $8=3x$，所以 $x=\frac{8}{3}$。此值不等於 1，故可接受。	2	
	(c) 該說法錯誤；值域為 $\{y\in R: y\neq 2\}$。 假設 $f(x)=2$。則 $\frac{2x+3}{x-1}=2$，所以 $2x+3=2x-2$，得出 $3=-2$，矛盾。故 $f(x)$ 不可能等於 2。反之，對任意實數 $y\neq 2$，解 $y=\frac{2x+3}{x-1}$ 得 $x(y-2)=y+3$，所以 $x=\frac{y+3}{y-2}$，此為不等於 1 的實數。因此除 2 以外每個實數值均可取到，值域為 $\{y\in R: y\neq 2\}$。	3	
6.	**(a)** 頂點 $(2,-9)$；對稱軸 $x=2$；x 截距 $(-1,0)$ 及 $(5,0)$ 圖像為 $y=(x-2)^2-9$，故頂點為 $(2,-9)$，對稱軸為 $x=2$。求 x 截距時，設 $y=0$：$(x-2)^2=9$，所以 $x-2=\pm 3$。因此 $x=5$ 或 $x=-1$，即 $(-1,0)$ 及 $(5,0)$。	3	
	(b) $g(x)=-(x-1)^2+13$ 沿 x 軸反射得 $y=-f(x)$。向左平移 1 單位即以 $x+1$ 代替 x，向上平移 4 單位則加 4：$g(x)=-f(x+1)+4$。現 $f(x+1)=(x+1-2)^2-9=(x-1)^2-9$，故 $g(x)=-[(x-1)^2-9]+4=-(x-1)^2+13$。	3	
	(c) $x=1\pm\sqrt{13}$ 設 $g(x)=0$：$-(x-1)^2+13=0$，所以 $(x-1)^2=13$。因此 $x-1=\pm\sqrt{13}$，即 $x=1\pm\sqrt{13}$。	2	

TUTGATHER

題號	解法	分數	備註
7.	(a) $P(x) = -2(x-8)^2 + 72$；當 $x = 8$ 時，最大利潤為 \$72 $P(x) = -2(x^2 - 16x) - 56 = -2[(x-8)^2 - 64] - 56 = -2(x-8)^2 + 128 - 56 = -2(x-8)^2 + 72$。由於 $-2(x-8)^2 \leq 0$，故 $P(x) \leq 72$，當 $x = 8$ 時取等號。當價格為 \$8 時，最大利潤為 \$72。	3	
	(b) $x = 2$ 或 $x = 14$ 設 $P(x) = 0$：$-2(x-8)^2 + 72 = 0$，所以 $(x-8)^2 = 36$。因此 $x - 8 = \pm 6$，得 $x = 14$ 或 $x = 2$。收支平衡的價格為 \$2 及 \$14。	3	
	(c) $4 \leq x \leq 12$ 要求 $P(x) \geq 40$：$-2(x-8)^2 + 72 \geq 40$，所以 $-2(x-8)^2 \geq -32$，即 $(x-8)^2 \leq 16$。因此 $-4 \leq x - 8 \leq 4$，得 $4 \leq x \leq 12$。當價格介乎 \$4 與 \$12 之間（包括首尾）時，利潤至少為 \$40。	3	
乙部（10 分）			
8.	(a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 由於 x 截距為 -1 及 3，可設 $f(x) = a(x+1)(x-3)$。y 截距為 -3，故 $f(0) = a(1)(-3) = -3a = -3$，得 $a = 1$。因此 $f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$。	3	
	(b) $P(4, 5)$ 在交點處，$f(x) = 2x - 3$：$x^2 - 2x - 3 = 2x - 3$，所以 $x^2 - 4x = 0$，即 $x(x-4) = 0$。因此 $x = 0$ 或 $x = 4$。$x = 0$ 的點為 $(0, -3)$，故 P 的 x 坐標為 4。其 y 坐標為 $2(4) - 3 = 5$，所以 $P(4, 5)$。	2	
	(c) $0 < x < 4$ 在兩個交點之間，$y = f(x)$ 的圖像位於直線 L 之下，兩交點的 x 坐標為 0 及 4。因此當 $0 < x < 4$ 時，$f(x) < 2x - 3$。	2	
	(d) $k = 4$ 兩圖像相交之處滿足 $f(x) + k = 2x - 3$：$x^2 - 2x - 3 + k = 2x - 3$，所以 $x^2 - 4x + k = 0$。配方得 $(x-2)^2 + k - 4 = 0$。當 $k - 4 = 0$，即 $k = 4$ 時，恰有一個解。（切點為 $(2, 1)$。）	3	

TUTGATHER